Problemi di Fisica

ONDE

Il Suono

PROBLEMA

Determiniamo l'intervallo entro cui è compresa la lunghezza d'onda delle onde sonore nell'aria, assumendo come velocità di propagazione il valore di 340 m/s.

SOLUZIONE

Le onde meccaniche percepite dall'orecchio come suoni sono quelle di frequenza compresa fra i valori f_{min} = 20 Hz e f_{max} = 20 000 Hz. Pertanto, le corrispondenti lunghezze d'onda sono:

$$\lambda_{min} = \frac{v}{f_{max}} = \frac{340}{20000} = 0{,}017\,m = 1{,}7\,cm$$

$$\lambda_{max} = \frac{v}{f_{min}} = \frac{340}{20} = 17\,m$$

PROBLEMA

Determinate la distanza alla quale scoppia un tuono.

SOLUZIONE

Essendo la velocità della luce 300.000 km/s, possiamo ritenere trascurabile l'intervallo di tempo che intercorre fra lo scoccare del lampo e l'istante in cui il suo balenio viene percepito dall'osservatore.
Allora, se indichiamo con v = 330 m/s = 0,33 km/s la velocità del suono in aria, la distanza alla quale scoppia il tuono è data da:

$$d = vt = 0{,}33t$$

che, empiricamente, possiamo scrivere come:

$$d = \frac{t}{3}$$

PROBLEMA

Un uomo batte con un martello una rotaia di ferro. Calcolare l'intervallo di tempo che percepisce una persona che si trova a distanza s = 680 m dal punto colpito, tra l'istante in cui arriva il suono che si propaga in aria (v_a=340 m/s) e quello in cui si propaga nel ferro (v_f = 5000 m/s).

SOLUZIONE

Poiché la velocità del suono nel ferro è maggiore rispetto a quella nell'aria, la persona percepirà prima il suono che si propaga lungo la rotaia e poi quello che si propaga in aria:

$$t_a = \frac{s}{v_a} = \frac{680}{340} = 2\,s \qquad t_f = \frac{s}{v_f} = \frac{680}{5000} = 0{,}14\,s$$

pertanto l'intervallo di tempo che intercorre tra i due suoni percepiti è:

$$\Delta t = 2 - 0{,}14 = 1{,}86\,s$$

PROBLEMA

Una nave da pesca oceanografica munita di un ecogoniometro rileva un primo suono che proviene direttamente da un grosso banco di pesci e, dopo un intervallo di tempo pari a 2,00 s, un secondo suono che raggiunge la nave dopo essere stato riflesso dal fondo marino, che in quel punto è profondo 2000 m.

- Calcolare la profondità a cui si trova il banco di pesci, assumendo come velocità del suono nell'acqua il valore di 1500 m/s.

SOLUZIONE

Il tempo che impiega il suono per raggiungere la nave dopo essere stato riflesso da fondo marino è pari a:

$$t_2 = \frac{2h}{v} = \frac{2 \cdot 2000}{1500} = 2{,}67\,s$$

Poiché la nave rileva il suono riflesso dal fondo marino 2,00 s dopo aver rilevato il suono proveniente dal banco di pesci, significa che il tempo che il suono ha impiegato per raggiungere la nave dopo essere stato riflesso dal banco di pesci è pari a:

$$t_1 = 2{,}67 - 2{,}00 = 0{,}67\,s$$

Pertanto, il banco di pesci si trova alla seguente profondità:

$$t_1 = \frac{2x}{v} \Rightarrow x = \frac{vt_1}{2} = \frac{1500 \cdot 0{,}67}{2} = 503\,m$$

La presenza del fattore 2 nella formula del tempo t_1 e t_2 è dovuta al fatto che nel fenomeno della riflessione il suono percorre due volte la stessa distanza (andata + ritorno).

PROBLEMA

Si lascia cadere una pietra in un pozzo e si misura un tempo t = 3 s fra l'istante in cui si è lasciata cadere la pietra e l'istante in cui si riceve il rumore della caduta sul fondo.

- Calcolare la profondità del pozzo assumendo come velocità del suono v = 340 m/s

SOLUZIONE

Detta h la profondità del pozzo e detti t_1 e t_2 i tempi impiegati rispettivamente dalla pietra e dal suono a percorrere h, si ha:

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}gt_1^2 \\ h = vt_2 \\ t_1 + t_2 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}gt_1^2 = vt_2 \\ t_1 + t_2 = t \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a t_1 si ha:

$$gt_1^2 + 2vt_1 - 2vt = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 2gvt}}{g} = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 340 \cdot 3}}{9{,}8}$$

Scegliendo solo il valore positivo, perché l'unico che ha fisicamente senso, si ricava:

$$t_1 = 2{,}86\,s \qquad t_2 = t - t_1 = 3 - 2{,}86 = 0{,}14\,s$$

In definitiva, l'altezza del pozzo è:

$$h = vt_2 = 340 \cdot 0{,}14 = 47{,}6m$$

PROBLEMA

Una sorgente sonora puntiforme emette un suono di potenza P = 12,6 W che si propaga con la stessa intensità in tutte le direzioni.

- Calcolare a quale distanza dalla sorgente l'intensità del suono risulta $I=1{,}00\cdot10^{-4}$ W/m^2.

SOLUZIONE

Nell'ipotesi che l'onda sonora è emessa da una sorgente puntiforme immersa in un mezzo isotropo ed omogeneo, essa si propaga nello spazio per fronti d'onda sferici, per cui l'intensità del suono emesso dall'amplificatore a distanza r è:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

da cui è possibile ricavare la distanza alla quale l'intensità del suono risulta $I = 1{,}00\cdot10^{-4}$ W/m^2:

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{12{,}6}{4\pi\cdot 1{,}00\cdot 10^{-4}}} = 100\,\mathrm{m}$$

PROBLEMA

Due suoni hanno rispettivamente intensità I_1 = 4000 μW/m^2 e I_2 = 20 μW/m^2. Di quanti decibel il primo è più intenso del secondo?

SOLUZIONE

Come misura della sensazione sonora di un suono d'intensità I si assume il cosiddetto livello sonoro definito come:

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$$

dove si assume come intensità sonora della soglia di udibilità il valore $I_0=10^{-12}$ W/m^2.

Pertanto, il livello sonoro riferito al suoni di intensità I_1 = 4000 μW/m^2 e I_2 = 20 μW/m^2 è pari a:

$$\beta_1 = 10\log_{10}\frac{4000\cdot10^{-6}}{10^{-12}} = 96\,\mathrm{dB} \qquad \beta_2 = 10\log_{10}\frac{20\cdot10^{-6}}{10^{-12}} = 73\,\mathrm{dB}$$

In definitiva, il primo suono è più intenso del secondo di:

$$\beta = \beta_1 - \beta_2 = 96 - 73 = 23\,\mathrm{dB}$$

PROBLEMA

Il livello sonoro del rumore proveniente da un turboreattore situato a 30 m di distanza è pari a 140 dB. Trascurando qualsiasi processo di assorbimento e di riflessione del suono, calcoliamo il livello sonoro a 300 m di distanza dal turboreattore.

SOLUZIONE

Dalla definizione del livello sonoro ricaviamo l'intensità del suono a 30 m dal turboreattore:

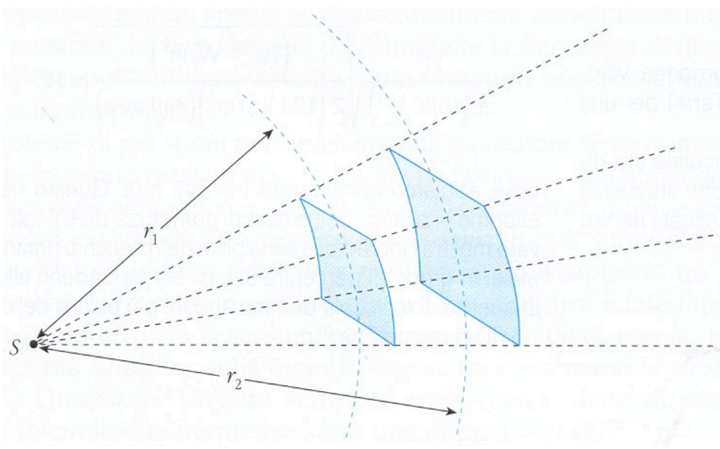
$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} \Rightarrow I = 10^{\frac{\beta}{10}} I_0 = 10^{14}\cdot 10^{-12} = 100\,W/m^2$$

dove la soglia di udibilità è $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Assumendo che l'onda sonora è emessa da una sorgente puntiforme immersa in un mezzo isotropo ed omogeneo, essa si propaga nello spazio per fronti d'onda sferici, per cui l'intensità del suono è:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

dove P è la potenza emessa dalla sorgente sonora e r è il raggio del fronte d'onda e quindi la distanza dalla sorgente.
Pertanto, se indichiamo con I e I' le intensità rispettivamente a distanza r e r' dalla sorgente, otteniamo:



$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad I' = \frac{P}{4\pi r'^2}$$

da cui:

$$\frac{I}{I'} = \frac{r'^2}{r^2}$$

Se I è l'intensità del suono a distanza r=30 m, l'intensità I' a distanza r'=300 m è data da:

$$I' = \frac{r^2}{r'^2} I = \frac{30^2}{300^2}\cdot 100 = 1\,W/m^2$$

In definitiva, il livello sonoro richiesto è:

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I'}{I_0} = 10\log_{10}\frac{1}{10^{-12}} = 120\,dB$$

dove $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 è la soglia di udibilità.

Quando più l'onda si allontana dalla sorgente tanto più il suono si affievolisce.

PROBLEMA

L'amplificatore di un impianto Hi-Fi ha una potenza di uscita P = 40,0 W a 1000 Hz.

- Calcolare il livello sonoro a una distanza r = 10,0 m dall'amplificatore. Se la potenza raddoppia, di quanti dB aumenta il livello sonoro alla stessa distanza? Si supponga che il suono si propaghi uniformemente in tutte le direzioni.

SOLUZIONE

Nell'ipotesi che l'onda sonora è emessa da una sorgente puntiforme immersa in un mezzo isotropo ed omogeneo, essa si propaga nello spazio per fronti d'onda sferici, per cui l'intensità del suono emesso dall'amplificatore a distanza r è:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{40{,}0}{4\pi \cdot 10{,}0^2} = 3{,}18 \cdot 10^{-2}\ W/m^2 \quad (1)$$

Ricordando che l'intensità del suono alla soglia di udibilità, a 1000 Hz di frequenza, è $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, all'intensità I trovata corrisponde il livello sonoro:

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} = 10\log_{10}\frac{3{,}18 \cdot 10^{-2}}{10^{-12}} = 105\,dB$$

Dalla (1) si ricava che quando la potenza P raddoppia, a parità di distanza r dalla sorgente raddoppia anche l'intensità I, per cui:

$$I' = 2I$$

Il corrispondente livello sonoro è:

$$\beta' = 10\log_{10}\frac{I'}{I_0} = 10\log_{10}\frac{2I}{I_0} = 10\log_{10}2 + 10\log_{10}\frac{I}{I_0} = 10\log_{10}2 + \beta = 108\,dB$$

Dunque:

$$\beta' - \beta = 10\log_{10}2 = 3\,dB$$

In conclusione, possiamo affermare che, se l'intensità sonora raddoppia, il livello sonoro aumenta di 3 dB.

PROBLEMA

Assumendo come intensità sonora della soglia di udibilità il valore $I_0=10^{-12}$ W/m^2, calcoliamo l'intensità sonora I di un suono il cui livello sonoro è β = 20 dB, corrispondente allo stormire delle foglie.

SOLUZIONE

Come misura della sensazione sonora di un suono d'intensità I si assume il cosiddetto livello sonoro definito come:

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0}$$

da cui segue che l'intensità sonora assume il valore:

$$I = 10^{\frac{\beta}{10}} I_0 = 10^2 \cdot 10^{-12} = 10^{-10}\ W/m^2$$

PROBLEMA

A distanza di 30 m l'intensità del rumore di un aereo a reazione è pari a 100 W/m^2. A quale distanza il livello sonoro del rumore percepito è uguale a 100 dB?

SOLUZIONE

Dalla formula dell'intensità del suono ricaviamo la potenza emessa dalla sorgente (aereo a reazione):

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow P = 4\pi r^2 I = 4\pi \cdot 30^2 \cdot 100 = 1{,}13 \cdot 10^6\ W$$

a cui corrisponde il seguente livello sonoro, ricordando che l'intensità del suono alla soglia di udibilità è $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2:

$$\beta = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} = 10\log_{10}\frac{100}{10^{-12}} = 140\,dB$$

Dalla definizione di livello sonoro ricaviamo l'intensità del suono corrispondente a 100 dB:

$$\beta' = 10\log_{10}\frac{I'}{I_0} \Rightarrow I' = 10^{\frac{\beta'}{10}} I_0 = 10^{\frac{100}{10}} \cdot 10^{-12} = 10^{-2}\ W/m^2$$

per cui, dalla formula dell'intensità del suono ricaviamo la distanza alla quale il livello sonoro del rumore percepito è uguale a 100 dB:

$$I' = \frac{P}{4\pi r'^2} \Rightarrow r' = \sqrt{\frac{P}{4\pi I'}} = \sqrt{\frac{1{,}13 \cdot 10^6}{4\pi \cdot 10^{-2}}} = 3000\,m$$

PROBLEMA

Considerando un suono di frequenza f=1000 Hz e di intensità $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, pari alla soglia di udibilità, vogliamo stimare l'ampiezza A dell'onda sonora nell'aria (v = 340 m/s), corrispondente allo spostamento massimo delle molecole di aria. (Densità dell'aria: ρ = 1,29 kg/m^3)

SOLUZIONE

L'energia immagazzinata in un elemento, di massa Δm, del mezzo in cui si propaga un'onda elastica di ampiezza A e frequenza f è data da:

$$\Delta E = 2\pi^2 \Delta m f^2 A^2 = 2\pi^2 \rho \Delta V f^2 A^2 \quad \text{dove: } \Delta m = \rho \Delta V$$

In un intervallo di tempo Δt l'onda sonora si propaga, viaggiando alla velocità v (velocità del suono nell'aria) per una distanza pari a:

$$d = v\Delta t$$

Consideriamo una sezione di area S perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda. L'energia che attraversa questa sezione nel tempo Δt è quella immagazzinata nel volume:

$$\Delta V = Sv\Delta t$$

e quindi possiamo scrivere:

$$\Delta E = 2\pi^2 \rho S v \Delta t f^2 A^2$$

Da cui la potenza che incide sulla superficie è:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = 2\pi^2 \rho S v f^2 A^2$$

e l'intensità del suono:

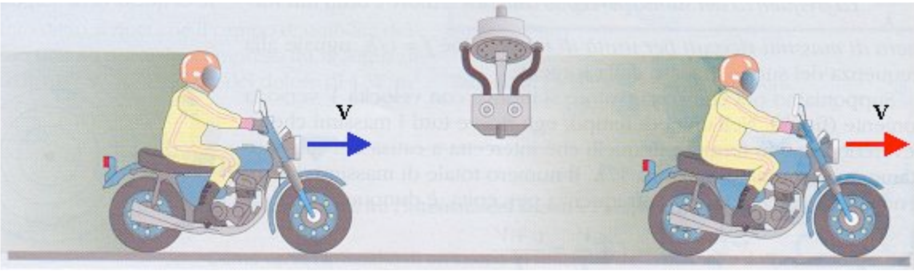
$$I = \frac{P}{S} = 2\pi^2 \rho v f^2 A^2 \quad (1)$$

Se indichiamo con I_0 l'intensità della soglia di udibilità (cioè l'intensità minima che deve avere un suono perché possa essere percepito dall'orecchio), dalla (1) possiamo ricavare l'ampiezza dell'onda sonora:

$$A = \sqrt{\frac{I_0}{2\pi^2 \rho v f^2}} = \frac{1}{\pi f}\sqrt{\frac{I_0}{2\rho v}} = \frac{1}{\pi \cdot 1000} \cdot \sqrt{\frac{10^{-12}}{2 \cdot 1{,}29 \cdot 340}} = 10^{-11}\ \text{m}$$

Questo risultato esprime una stima dell'ordine di grandezza dell'ampiezza A. Il valore trovato mostra l'incredibile sensibilità dell'orecchio umano normale, in grado di percepire stimoli corrispondenti allo spostamento di molecole dell'aria ancora più piccoli del diametro di un atomo (10^{-10} m).

PROBLEMA



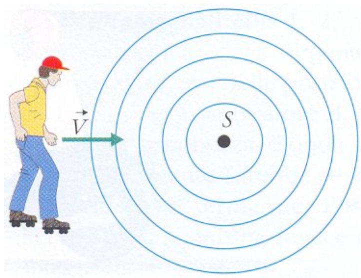
Una sirena ferma emette un suono (v=340 m/s) di frequenza f=5000 Hz. Un motociclista prima si avvicina e poi si allontana dalla sirena alla velocità V = 108 km/h = 30,0 m/s.

1. Calcolare la variazione di frequenza del suono percepito dal motociclista al passaggio davanti alla sirena.
2. Calcolare la variazione percentuale della frequenza del suono percepito dal motociclista, sia in fase di avvicinamento sia in fase di allontanamento.

SOLUZIONE

1. Il problema si riferisce al caso in cui la sorgente è ferma e l'osservatore in moto. Il motociclista mentre si avvicina alla sorgente con velocità V, percepisce, per l'effetto Doppler, un suono di frequenza:

$$f' = \left(1 + \frac{V}{v}\right)f = \left(1 + \frac{30{,}0}{340}\right) \cdot 5000 = 5440\,\text{Hz} \quad (1)$$



Quando invece si allontana dalla sorgente sonora percepisce la frequenza:

$$f'' = \left(1 - \frac{V}{v}\right)f = \left(1 - \frac{30{,}0}{340}\right) \cdot 5000 = 4560\,\text{Hz} \quad (2)$$

Pertanto la variazione di frequenza al passaggio davanti alla sirena è:

$$f'' - f' = 4560 - 5440 = -880\,\text{Hz}$$

La frequenza del suono percepito dall'osservatore è data dal numero di massimi dell'onda sonora ricevuti per unità di tempo, per cui quando si muove verso la sorgente sonora intercetta, nell'unità di tempo, un numero maggiore di massimi dell'onda sonora rispetto a quando è fermo, per cui percepisce una frequenza f ' maggiore di quella della sorgente. Al contrario, quando si allontana dalla sorgente intercetta, nell'unità di tempo, un numero minore di massimi dell'onda sonora rispetto a quando è fermo, per cui percepisce una frequenza f'' minore di quella della sorgente.

2. Dalla (1) si ricava che la variazione di frequenza in fase di avvicinamento è:

$$f' - f = \frac{V}{v}f$$

e quindi la variazione percentuale è:

$$\Delta f\% = \frac{f' - f}{f} \cdot 100 = \frac{V}{v} \cdot 100 = \frac{30{,}0}{340} \cdot 100 = 8{,}82\%$$

Dalla (2) si ricava che la variazione di frequenza in fase di allontanamento è:

$$f'' - f = -\frac{V}{v}f$$

e quindi la variazione percentuale è:

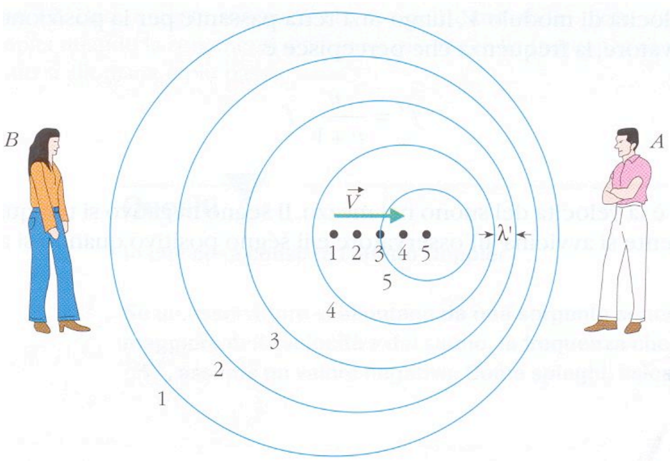
$$\Delta f\% = \frac{f'' - f}{f} \cdot 100 = -\frac{V}{v} \cdot 100 = -\frac{30{,}0}{340} \cdot 100 = -8{,}82\%$$

PROBLEMA

Un'automobile passa davanti a una persona alla velocità V=30,0 m/s, con il clacson che emette un suono (velocità del suono rispetto all'aria v=340 m/s) di frequenza f=400 Hz .

- Calcolare la variazione di frequenza del suono percepito dall'osservatore al passaggio dell'automobile e la variazione percentuale della frequenza percepita sia durante l'avvicinamento che durante l'allontanamento dell'automobile.

SOLUZIONE



Il problema si riferisce al caso in cui la sorgente è in moto e l'osservatore fermo. La frequenza percepita dall'osservatore mentre l'automobile si avvicina, per l'effetto Doppler, è data da:

$$f' = \frac{v}{v - V} f = \frac{340}{340 - 30,0} \cdot 400 = 439\,\text{Hz} \quad (1)$$

mentre quella percepita quando si allontana è:

$$f'' = \frac{v}{v + V} f = \frac{340}{340 + 30,0} \cdot 400 = 368\,\text{Hz} \quad (2)$$

Al passaggio dell'automobile, la variazione di frequenza è dunque:

$$f'' - f' = 368 - 439 = -71,0\,\text{Hz}$$

Per l'osservatore A che vede avvicinarsi la sorgente sonora, la lunghezza d'onda λ' è minore di quella λ che percepirebbe con la sorgente ferma, e poiché la frequenza è legata alla lunghezza d'onda dalla relazione f '=v/λ', percepisce una frequenza f ' maggiore.
Al contrario, per l'osservatore B la sorgente si allontana e la lunghezza d'onda percepita è maggiore di λ e quindi la frequenza percepita f'' è minore.

Dalla (1) si ricava che la variazione di frequenza mentre l'automobile si avvicina è:

$$f' - f = \frac{V}{v - V} f$$

da cui segue che la variazione percentuale è:

$$\Delta f\% = \frac{f' - f}{f} \cdot 100 = \frac{V}{v - V} \cdot 100 = \frac{30,0}{340 - 30,0} \cdot 100 = 9,68\%$$

Analogamente si trova che la variazione percentuale di frequenza del suono mentre l'automobile si allontana è:

$$\Delta f\% = \frac{f' - f}{f} \cdot 100 = \frac{V}{v + V} \cdot 100 = \frac{30,0}{340 + 30,0} \cdot 100 = 8,11\%$$

AI contrario di quel che avviene con la sorgente ferma e l'osservatore in moto, nel caso qui considerato, in cui l'osservatore è fermo e la sorgente in moto, le variazioni di frequenza durante l'avvicinamento e l'allontanamento della sorgente assumono valori diversi.

PROBLEMA

Un'onda sonora di frequenza pari a 4000 Hz viene riflessa da un ostacolo, che si muove verso la sorgente ferma con una velocità di 4,0 m/s. Se la velocità del suono nell'aria è 330 m/s, di quanto differisce la frequenza dell'onda riflessa da quella dell'onda incidente?

SOLUZIONE

Descriviamo la riflessione dell'onda sonora da parte dell'ostacolo come un processo costituito da due fasi distinte.

- L'ostacolo assorbe l'onda che incide su di esso

L'ostacolo si comporta come un ricevitore in movimento verso una sorgente fissa per cui la frequenza ricevuta differisce, per effetto Doppler, da quella emessa dalla sorgente:

$$f' = \left(1 + \frac{V}{v}\right)f = \left(1 + \frac{4,0}{330}\right) \cdot 4000 = 4048\,\text{Hz}$$

- L'ostacolo riemette l'onda nel verso opposto

In questo caso l'ostacolo si comporta invece come una sorgente in movimento per cui la frequenza rivelata in un sistema di riferimento solidale con l'aria è "spostata" rispetto alla frequenza propria della sorgente:

$$f'' = \frac{v}{v + V} f' = \frac{330}{330 + 4,0} \cdot 4048 = 3952\,\text{Hz}$$

Si noti che la frequenza propria è quella che l'ostacolo ha ricevuto nella prima fase.

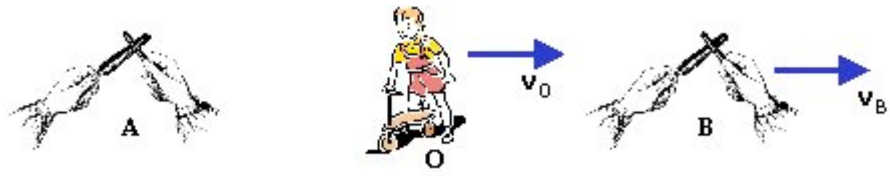
In definitiva, l'onda incidente differisce da quella riflessa della quantità:

$$f' - f'' = 4048 - 3952 = 96\,\text{Hz}$$

PROBLEMA

A e B sono due diapason uguali di frequenza f = 500 Hz. Il primo è fermo, mentre B si allontana verso destra con velocità costante v_B = 60 m/s. Fra i due diapason si trova un osservatore O che si muove, pure verso destra, con velocità costante v_0 = 30 m/s. Assumendo che la velocità del suono in aria sia v = 332 m/s, calcolare:

1. la frequenza del suono proveniente da A e percepita dall'osservatore O;
2. la frequenza del suono proveniente da B e percepita dall'osservatore O;
3. la frequenza del suono risultante percepita dall'osservatore O.



SOLUZIONE

E' un tipico caso di effetto Doppler.

1. E' il caso di sorgente fissa e di osservatore mobile che si allontana:

$$f'_A = \left(\frac{v - v_0}{v}\right) f_A = \left(\frac{332 - 30}{332}\right) \cdot 500 = 455\,\text{Hz}$$

2. E' il caso in cui si muovono sia la sorgente che l'osservatore. La prima tende ad allontanarsi da O, mentre questi si avvicina alla sorgente, perciò:

$$f'_B = \left(\frac{v + v_0}{v + v_B}\right) f_B = \left(\frac{332 + 30}{332 + 60}\right) \cdot 500 = 462\,\text{Hz}$$

3. All'osservatore provengono due suoni distinti di uguale ampiezza e di frequenza lievemente differente; è il tipico caso dei battimenti. La frequenza dei battimenti, ossia la frequenza udita dall'osservatore, è uguale alla differenza fra le frequenze delle due onde che si sovrappongono:

$$f_0 = f'_B - f'_A = 462 - 455 = 7\,\text{Hz}$$

PROBLEMA

La frequenza del rombo del motore di un'automobile viene valutata, da un agente stradale fermo sul ciglio di una strada, pari a 150 Hz quando la macchina si avvicina e a 130 Hz quando si allontana, sempre con la stessa velocità.

1. L'automobile ha superato il limite di velocità, che su quella strada è di 80 km/h?
2. Qual è la frequenza reale corrispondente al rombo del motore?

Si assuma come velocità del suono in aria il valore v = 340 m/s.

SOLUZIONE

1. Il problema si riferisce al caso in cui la sorgente è in moto e l'osservatore fermo. La frequenza percepita dal poliziotto mentre l'automobile si avvicina, per l'effetto Doppler, è data da:

$$f' = \frac{v}{v - V} f \qquad (1)$$

mentre quella percepita quando si allontana è:

$$f'' = \frac{v}{v + V} f \qquad (2)$$

Dalla (1) e dalla (2) ricaviamo la frequenza reale f del motore:

$$f = \frac{v - V}{v} f' \qquad\qquad f = \frac{v + V}{v} f''$$

Dal confronto delle due relazioni trovate otteniamo un'equazione la cui soluzione ci dà il valore della velocità dell'automobile:

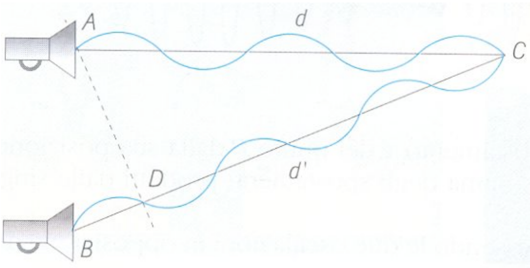
$$\frac{v - V}{v} f' = \frac{v + V}{v} f'' \Rightarrow V = \frac{f' - f''}{f' + f''} v = \frac{150 - 130}{150 + 130} \cdot 340 = 24{,}3\,m/s = 87{,}4\,km/h$$

L'automobile ha superato il limite di velocità.

2. Il valore della frequenza reale f corrispondente al rombo del motore la calcoliamo utilizzando, indifferentemente, la (1) o la (2):

$$f = \frac{v - V}{v} f' = \frac{340 - 24{,}3}{340} \cdot 150 = 140\,Hz$$

PROBLEMA



Supponiamo che i due altoparlanti A e B, distanti 2,00 m l'uno dall'altro, stiano emettendo onde sonore con la stessa fase e con la stessa frequenza f=1000 Hz. Nel punto C, a distanza d=5,00 m dall'emettitore A, si trova un ascoltatore. È possibile che la persona, per effetto dell'interferenza fra le due onde, non senta nulla o quasi?

SOLUZIONE

La condizione affinchè le due onde arrivino in C in opposizione di fase, producendo una interferenza distruttiva, ossia che un ascoltatore in C non riceva nessun suono, è che i cammini delle onde differiscano di una quantità Δx pari a un multiplo dispari di $\lambda/2$:

$$\Delta x = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{con } m = 0,1,2,3,\ldots \quad (1)$$

Nel punto C si avrà un'interferenza distruttiva se la differenza di cammino delle onde provenienti dalle due sorgenti, cioè la differenza fra le distanze d e d' del punto C da A e da B, è uguale, ad esempio, a mezza lunghezza d'onda. Tale differenza di cammino è rappresentata, in figura, dal segmento BD.
Assumendo come velocità del suono v = 340 m/s, la lunghezza d'onda del suono emesso dagli altoparlanti è:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{1000} = 0{,}340\,m$$

Dunque deve essere:

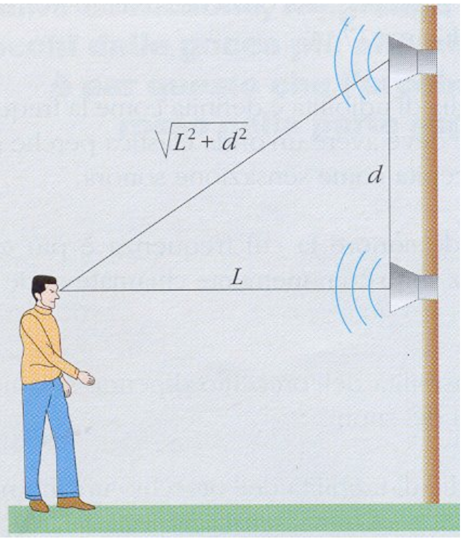
$$\overline{BD} = \frac{\lambda}{2} = \frac{0{,}340}{2} = 0{,}170\,m$$

Perché nel punto C si abbia interferenza distruttiva, la lunghezza BD, in base alla (1), può anche essere uguale a un multiplo dispari di 0,170 m.
Un'interferenza distruttiva si ha dunque se la distanza di C da B è:

$$d' = d + \overline{BD} = 5{,}00 + 0{,}170 = 5{,}17\,m$$

In conclusione possiamo affermare che esistono punti nei quali le onde emesse dai due altoparlanti interferiscono distruttivamente (uno è quello trovato, che dista 5,00 m da A e 5,17 m da B). Se tuttavia i due altoparlanti fossero distanziati fra di loro per meno di 0,17 m (nel nostro caso tale distanza è 2,00 m), non esisterebbe alcun punto distante da un altoparlante 0,17 m più che dall'altro, e quindi in nessun punto dello spazio si potrebbe avere interferenza distruttiva. Osserviamo infine che, se gli altoparlanti, anziché emettere un suono puro, emettono un suono composto da un ampio intervallo di frequenze, non tutte le lunghezze d'onda interferiscono distruttivamente nello stesso punto. Comunque il suono è più debole e alquanto distorto rispetto a quello emesso da un singolo altoparlante.

PROBLEMA



Due altoparlanti emettono, in fase, onde sonore di uguale frequenza f = 200 Hz. I due altoparlanti sono fissati, a distanza d = 4,00 m l'uno dall'altro, su un'asta verticale. Un uomo, partendo da lontano, cammina in direzione dell'altoparlante più in basso. A quale distanza dal palo si troverà quando, per effetto dell'interferenza distruttiva, sentirà il primo minimo di intensità sonora? Quante volte, in totale, prima di raggiungere il palo, sentirà un minimo d'intensità sonora? Si supponga che la velocità del suono nell'aria sia v = 330 m/s.

SOLUZIONE

Quando l'uomo è molto distante dal palo, la differenza Δx fra le distanze percorse dalle due onde dalle rispettive sorgenti fino all'orecchio dell'uomo è praticamente nulla. Tale differenza aumenta man mano che l'uomo si avvicina al palo e, come è evidente dal disegno, a una generica distanza L, è data da:

$$\Delta x = \sqrt{L^2 + d^2} - L \quad (1)$$

La condizione affinchè le due onde producano una interferenza distruttiva è che i cammini delle onde differiscano di una quantità Δx pari a un multiplo dispari di λ/2:

$$\Delta x = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{con } m = 0,1,2,3,\ldots$$

Pertanto, affinchè l'uomo si trovi nel primo punto di interferenza distruttiva deve essere:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = \frac{1,65}{2} = 0,825\,\text{m} \qquad \text{dove: } \lambda = \frac{v}{f} = \frac{330}{200} = 1,65\,\text{m}$$

A questo punto, grazie alla (1), siamo in grado di calcolare la distanza dal palo alla quale l'uomo si troverà quando, per effetto dell'interferenza distruttiva, sentirà il primo minimo di intensità sonora:

$$\Delta x + L = \sqrt{L^2 + d^2} \Rightarrow 0,825 + L = \sqrt{L^2 + 4,00^2}$$

elevando al quadrato primo e secondo membro ed effettuando tutti i possibili passaggi algebrici si ottiene:

$$0,825^2 + L^2 + 2\cdot 0,825\cdot L = L^2 + 16 \Rightarrow 1,65L = 15,3 \Rightarrow L = \frac{15,3}{1,6} = 9,6\,\text{m}$$

La seconda interferenza distruttiva si ha quando:

$$\Delta x = \frac{3\lambda}{2} = \frac{3\cdot 1,65}{2} = 2,48\,\text{m}$$

e quindi l'uomo sentirà il secondo minimo di intensità sonora alla seguente distanza dal palo:

$$\Delta x + L = \sqrt{L^2 + d^2} \Rightarrow 2,48 + L = \sqrt{L^2 + 4,00^2}$$

$$2,48^2 + L^2 + 2\cdot 2,48\cdot L = L^2 + 16 \Rightarrow 4,96L = 9,85 \Rightarrow L = \frac{9,85}{4,96} = 1,99\,\text{m}$$

La terza interferenza distruttiva si ha quando:

$$\Delta x = \frac{5\lambda}{2} = \frac{5 \cdot 1{,}65}{2} = 4{,}13\,\text{m}$$

e quindi l'uomo dovrebbe sentire il terzo minimo di intensità sonora alla seguente distanza dal palo:

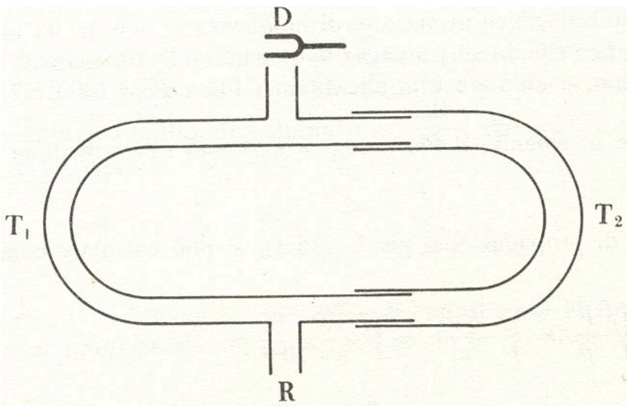
$$\Delta x + L = \sqrt{L^2 + d^2} \Rightarrow 4{,}13 + L = \sqrt{L^2 + 4{,}00^2}$$

$$4{,}13^2 + L^2 + 2 \cdot 4{,}13 \cdot L = L^2 + 16 \Rightarrow L = 8{,}26 \Rightarrow L = -\frac{1{,}06}{8{,}26} = -0{,}13\,\text{m}$$

la quale, essendo negativa, è una soluzione fisicamente non accettabile.

In definitiva, l'uomo prima di raggiungere il palo, sentirà due volte il minimo d'intensità sonora.

PROBLEMA



Consideriamo un tubo di Quincke pere studiare l'interferenza delle onde sonore. Il tubo T_1 ha lunghezza fissa mentre il tubo T_2 è a lunghezza variabile. All'istante iniziale i due tubi hanno la medesima lunghezza; allungando T_2, dapprima il suono in R prodotto dal diapason D va diminuendo di intensità, poi si annulla, quindi riaumenta finché per un allungamento Δx=76,3 cm si ha l'intensità massima in R.

- Calcolare la frequenza del diapason.

SOLUZIONE

Si ha interferenza costruttiva, ossia il massimo dell'intensità in R, quando la differenza di cammino fra le due onde è un numero intero della lunghezza d'onda:

$$\Delta x = n\lambda$$

Poiché il primo massimo si ha quando:

$$\Delta x = \lambda = 0{,}763\,\text{m}$$

allora la frequenza del diapason è:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{332}{0{,}763} = 435\,\text{Hz}$$

dove abbiamo assunto come velocità del suono nel tubo il valore v=332 m/s

PROBLEMA

Due sorgenti sonore nell'aria, poste fra loro ad una certa distanza sono perfettamente coerenti. Se la frequenza del suono vale f = 680 Hz e la velocità v = 340 m/s, determinare le distanze minime, dal punto medio della distanza fra le due sorgenti, in cui non si ha suono.

SOLUZIONE

E' un semplice caso di interferenza. Nel punto di mezzo della distanza fra le due sorgenti, poiché queste sono coerenti ed i cammini percorsi dal suono sono uguali, si ha un massimo di intensità, ossia interferenza costruttiva. I punti più prossimi in cui non si ha suono, ossia interferenza distruttiva, saranno quelli che distano dal punto medio di $\lambda/2$:

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f} = \frac{340}{2 \cdot 680} = 0{,}25\,\text{m}$$

PROBLEMA

Una colonna d'aria, in un tubo lungo L_1=0,90 m, chiuso ad un estremo, viene posta in risonanza sulla frequenza fondamentale mediante l'eccitazione di un filo omogeneo teso, posto in vicinanza dell'apertura del tubo. Il filo è lungo L_2=36 cm ed ha una massa m=10 g; esso è fissato agli estremi ed oscilla con la sua frequenza fondamentale.

Calcolare:

1. la frequenza di risonanza;
2. la tensione del filo.

SOLUZIONE

1. Per un tubo chiuso ad una estremità che risuona per la frequenza fondamentale, deve essere:

$$\lambda_1 = 4L_1 \quad \text{da cui: } L_1 = \frac{\lambda_1}{4}$$

Se indichiamo con v=332 m/s la velocità del suono nel tubo, si ha che la frequenza di risonanza è:

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L_1} = \frac{332}{4 \cdot 0{,}90} = 92{,}2\,\text{Hz}$$

2. Poiché il filo è fissato agli estremi, questi devono necessariamente essere dei nodi, quindi la corrispondente lunghezza d'onda è:

$$\lambda = 2L_2 \qquad \text{da cui la lunghezza del filo sarà: } L_2 = \frac{\lambda}{2}$$

e da ciò la frequenza di risonanza fondamentale del filo è:

$$f_1 = \frac{v}{2L_2} = \frac{1}{2L_2}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{2L_2}\sqrt{\frac{FL_2}{m}} \quad (1)$$

dove la densità lineare è definita come: $\mu = \frac{m}{L_2}$

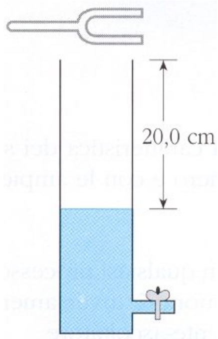
Dalla (1) è possibile quindi ricavare la tensione del filo:

$$F = 4L_2 f_1^2 m = 4 \cdot 0{,}36 \cdot 92{,}2^2 \cdot 0{,}01 = 122\,\text{N}$$

PROBLEMA

Facendo vibrare un diapason all'imboccatura del tubo si osserva che l'altezza minima della colonna d'aria, contenuta nel tubo al di sopra del livello dell'acqua, per cui si ottiene un rinforzo del suono è 20,0 cm.
Assumendo per la velocità di propagazione del suono il valore di 340 m/s, calcolare:

1. la frequenza di vibrazione del diapason;
2. per quale altezza della colonna d'aria si ottiene la risonanza successiva, qualora si faccia uscire lentamente l'acqua dal rubinetto.



SOLUZIONE

1. Quando la colonna d'aria raggiunge l'altezza di 20,0 cm il suono del diapason viene rinforzato, e ciò avviene perché una delle frequenze di risonanza della colonna d'aria coincide con la frequenza del diapason. Nella colonna d'aria si stabilisce allora l'onda stazionaria corrispondente a quella frequenza. La superficie dell'acqua agisce come una parete e quindi le possibili onde stazionarie hanno tutte un nodo sulla superficie dell'acqua e un ventre all'estremità aperta del recipiente.

Nel caso in esame, tubo chiuso ad un'estremità, i profili di vibrazione sono identici a quelli delle onde stazionarie che si stabiliscono nelle corde con un'estremità libera e una fissa e le corrispondenti lunghezze d'onda e frequenze di risonanza sono:

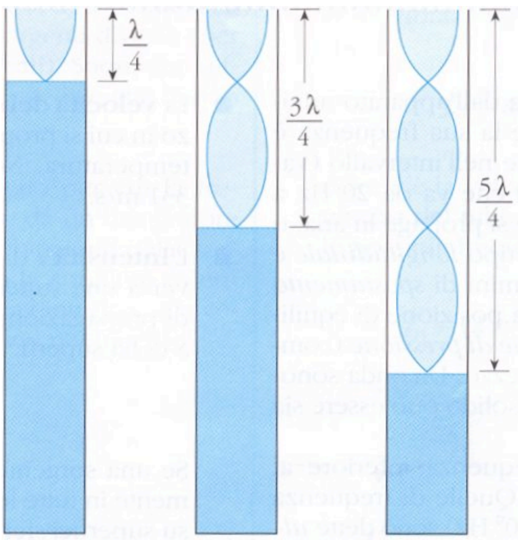
$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{4h}{2n-1} \\ f_n = (2n-1)\dfrac{v}{4h} \end{cases} \qquad \text{con } n = 1,2,3,\ldots$$

La prima condizione di risonanza (n = 1) si ha quando l'altezza della colonna d'aria assume il valore di 20,0 cm a cui corrisponde la seguente frequenza per il suono emesso dal diapason:

$$f_1 = \frac{v}{4h} = \frac{340}{4 \cdot 0{,}20} = 425\,\text{Hz}$$

Pertanto, si ottiene la prima condizione di risonanza quando l'altezza della colonna d'aria assume il valore:

$$h = \frac{\lambda_1}{4}$$



2. La seconda condizione di risonanza (n=2) si ottiene quando l'altezza della colonna d'aria assume il valore:

$$h = \frac{3}{4}\lambda = \frac{3}{4} \cdot 0{,}80 = 0{,}60\,\text{m} = 60\,\text{cm}$$

In generale, se si eccita un diapason vicino all'imboccatura del recipiente si ottiene risonanza quando h assume i valori:

$$h = (2n-1)\frac{\lambda}{4} \qquad \text{con } n = 0,1,2,3,\ldots$$

PROBLEMA

Una sirena emette un suono attraverso un disco ruotante di raggio $r = 20$ cm, dotato di 30 fori distribuiti uniformemente. Il disco viene posto all'estremità di un tubo di lunghezza $L = 40$ cm, che entra in risonanza con il suono provocato dalla sirena. Calcola la velocità tangenziale del bordo del disco affinché il tubo risuoni alla sua frequenza fondamentale e alla prima armonica superiore.

MODELLO FISICO

La sirena costituita dal disco, ruotando a una certa frequenza, fa risuonare l'aria dentro al tubo che si suppone aperto anche all'altra estremità.

LEGGI ED EQUAZIONI

La frequenza relativa all'armonica fondamentale è uguale a $f_1 = \frac{1}{2L}v$ con v velocità del suono; la seconda armonica (prima armonica superiore alla fondamentale) è $f_2 = 2f_1$.

Se n è il numero di fori del disco, la frequenza di emissione del suono da parte della sirena è n volte la frequenza di rotazione del disco f_d; infatti, a ogni rotazione l'aria è messa in oscillazione attraverso i fori n volte, e quindi $f = nf_d$.

SOLUZIONE ALGEBRICA

La velocità di rotazione del disco è:

$$v_d = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f_d = \frac{2\pi r f}{n}$$

SOLUZIONE NUMERICA

Sostituendo i valori si ottengono le frequenze:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{340\ \text{m/s}}{2 \cdot 0,4\ \text{m}} = 425\ \text{Hz}$$

$$f_2 = 2f_1 = 850\ \text{Hz}$$

La velocità tangenziale del disco relativa alle due frequenze è:

$$v_1 = \frac{(2\pi \cdot 0,2\ \text{m} \cdot 425\ \text{Hz})}{30} = 17,8\ \text{m/s}$$

$$v_2 = 2v_1 = 35,6\ \text{m/s}$$

PROBLEMA

Una canna d'organo chiusa alle due estremità ha lunghezza L = 5,0 m.

1. Calcolare la frequenza fondamentale e l'armonica successiva delle onde sonore stazionarie, nel caso in cui la velocità del suono nell'aria sia v = 340 m/s.
2. Calcolare le due frequenze nel caso in cui la canna d'organo sia chiusa solo a una estremità.

SOLUZIONE

1. Nel primo caso, l'onda stazionaria che si forma nella canna d'organo deve presentare un nodo alle due estremità chiuse. I modi di oscillazione dell'aria contenuta nella canna hanno le stesse proprietà delle onde stazionarie in una corda con entrambe le estremità fisse. Pertanto la frequenza fondamentale è:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{340}{2 \cdot 5{,}0} = 34\,\text{Hz}$$

e l'armonica successiva è:

$$f_2 = 2f_1 = 2 \cdot 34 = 68\,\text{Hz}$$

2. Il secondo caso è analogo a quello di una corda con un'estremità libera e l'altra fissa. La frequenza fondamentale è:

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{340}{4 \cdot 5{,}0} = 17\,\text{Hz}$$

e il modo successivo ha una frequenza tripla rispetto a quella fondamentale, cioè:

$$f_2 = 3f_1 = 3 \cdot 17 = 51\,\text{Hz}$$

PROBLEMA

In un tubo sonoro un'onda di pressione $p_1 = P\text{sen}2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ ed un'onda riflessa $p_2 = -P\text{sen}2\pi f\left(t + \frac{x}{v}\right)$ si sovrappongono per formare un'onda stazionaria.

- Determinare l'equazione dell'onda risultante e la posizione dei nodi di pressione.

SOLUZIONE

Per il principio di sovrapposizione si ha:

$$p = p_1 + p_2 = P\left[\text{sen}2\pi f(t - x/v) - \text{sen}2\pi f(t + x/v)\right] \quad (1)$$

Ricordando le formule di prostaferesi:

$$\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta = 2\text{sen}\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

la (1) diventa:

$$p = P\left\{2\text{sen}\frac{2\pi f}{2}\left[t - \frac{x}{v} - \left(t + \frac{x}{v}\right)\right]\cos\frac{2\pi f}{2}\left[t - \frac{x}{v} + t + \frac{x}{v}\right]\right\} = -2P\cos 2\pi ft\,\text{sen}2\pi\frac{x}{\lambda}$$

che è l'equazione dell'onda stazionaria.

I nodi di pressione si hanno in quei punti per i quali p = 0, indipendentemente dall'istante considerato, e ciò è vero quando:

$$\text{sen}2\pi\frac{x}{\lambda} = 0 \Rightarrow 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0 + n\pi \Rightarrow x = \frac{n\lambda}{2} \quad \text{con: } n = 0,1,2,\ldots$$

PROBLEMA

Due sorgenti sonore coerenti A e B, in fase e di frequenza uguale f = 170 Hz, irradiano uniformemente in aria in ogni direzione. La potenza del segnale emesso da A è $P_A = 12{,}56\cdot10^{-3}$ W, mentre quella del segnale emesso da B è $P_B = 25{,}12\cdot10^{-3}$ W. Calcolare:

1. Lo sfasamento con il quale le due onde giungono in un punto C, a distanza r_A = 3 m da A e r_B = 4 m da B;
2. L'intensità dei due segnali in C considerati separatamente;
3. L'intensità totale dei due segnali in C

Si assuma come velocità dei due segnali in aria v = 340 m/s.

SOLUZIONE

1. Lo sfasamento dei due segnali nel punto C è dato da:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta\phi \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}(r_B - r_A) = \frac{2\pi}{2}\cdot(4-3) = \pi\,\text{rad} = 180°$$

dove: $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{170} = 2\,\text{m}$

2. Poiché la relazione tra intensità sonora e potenza è:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

abbiamo che l'intensità dei due segnali in C considerati separatamente vale:

$$I_A = \frac{P_A}{4\pi r_A^2} = \frac{12{,}56\cdot10^{-3}}{4\pi\cdot3^2} = 1{,}11\cdot10^{-4}\ W/m^2 \qquad I_B = \frac{P_B}{4\pi r_B^2} = \frac{25{,}12\cdot10^{-3}}{4\pi\cdot4^2} = 1{,}25\cdot10^{-4}\ W/m^2$$

Attraverso la composizione di moti armonici si dimostra che l'intensità totale dei due segnali nel punto C è data dalla relazione:

$$I_T = I_A + I_B + 2\sqrt{I_A I_B}\cos\Delta\phi$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$I_T = 1{,}11\cdot10^{-4} + 1{,}25\cdot10^{-4} + 2\sqrt{1{,}11\cdot10^{-4}\cdot1{,}25\cdot10^{-4}}\cos\pi = 5\cdot10^{-7}\ W/m^2$$

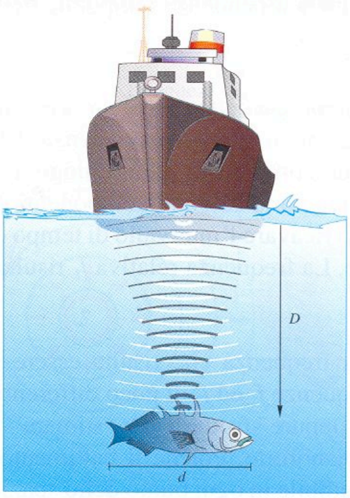
Abbiamo dunque un caso di interferenza distruttiva con quasi completa estinzione del suono. Se i due segnali avessero avuto anche la stessa ampiezza l'intensità totale sarebbe stata nulla.

PROBLEMA

Una nave è dotata di un SONAR per la localizzazione dei banchi di pesci in profondità. Sapendo che la velocità delle onde sonore nell'acqua è di 1,5 km/s, calcola quale deve essere la minima frequenza emessa affinché lo strumento possa individuare singoli pesci di dimensione *d* = 50 cm. Supponendo che la nave sia ferma, calcola a quale profondità *D* dalla nave si trova un banco di pesci, se l'intervallo di tempo tra l'emissione e la ricezione delle onde è uguale a 0,2 s.

■ MODELLO FISICO

Il SONAR funziona sul principio della riflessione delle onde sonore contro gli ostacoli. Per avere un chiaro ascolto dell'onda riflessa, la lunghezza d'onda del segnale trasmesso deve essere molto più piccola dell'ostacolo, per limitare l'effetto della diffrazione. Il suono si trasmette nell'acqua con moto uniforme.



■ LEGGI ED EQUAZIONI

La relazione tra velocità, frequenza e lunghezza d'onda del segnale è $v = \lambda f$, con $\lambda << d$.
L'equazione del moto uniforme è $x = vt$, con x distanza percorsa, v velocità dell'onda, t intervallo di tempo impiegato. Se la distanza coperta dagli ultrasuoni è uguale a x, la distanza D tra la nave e il banco di pesci è la metà, cioè $D = \frac{x}{2}$.

■ SOLUZIONE ALGEBRICA

Dalla condizione per la diffrazione si ottiene:

$$\lambda f << d f \quad \Rightarrow \quad f >> \frac{v}{d}$$

La distanza D risulta essere:

$$D = \frac{vt}{2}$$

■ SOLUZIONE NUMERICA

Sostituendo i dati forniti dal problema si ottiene:

$$f >> \frac{1,5 \cdot 10}{5 \cdot 10^{-1}} \text{ Hz} = 3 \cdot 10^3 \text{ Hz} = 3000 \text{ Hz}$$

Date due grandezze A e B, se $A >> B$ allora la grandezza A deve essere almeno di un ordine di grandezza maggiore di B; la frequenza deve essere quindi $f \geqslant 30\,000$ Hz, e cioè le frequenze prodotte dal SONAR devono variare nell'intervallo degli ultrasuoni.
La profondità D alla quale si trova il banco di pesci è:

$$D = \frac{(1,5 \cdot 10^3 \text{ m/s}) \cdot 2 \cdot 10^{-1} \text{ s}}{2} = 150 \text{ m}$$